

Lista 1-Eletromagnetismo 1

Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral

February 25, 2014

1^a Questão:

Espressando em termos de componentes usando o símbolo de Levi-Civita mostre que

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \quad (1)$$

e que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Obs: Utilize a regra para produto de duas ϵ ,s.

2^a Questão:

Usando que sob uma rotação um campo vetorial se comporta como

$$V'_i(x') = R_{ij}V_j(x), \quad (2)$$

mostre que o sua divergncia se comporta como um escalar:

$$\partial'_i V'_i(x') = \partial_j V_j(x). \quad (3)$$

Mostre que o laplaciano de uma campo escalar também é um escalar.

3^a Questão:

Mostre que

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{V}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{V} + \vec{\nabla} \phi \times \vec{V}. \quad (4)$$

e

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (5)$$

4ª Questão:

a) Realizando a mudança de variáveis, $x \rightarrow x' = kx$, mostre que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x) \quad (6)$$

b) Mostre, aplicando a uma função teste genérica $f(x)$ e integrando, que

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x). \quad (7)$$

c) Considere uma função, $g(x)$, bem comportada na origem. Mostre que o produto $g(x)\delta(x - x_0)$ se comporta da mesma forma que $g(x_0)\delta(x - x_0)$. Você consegue ver sentido na expressão $\delta(x)\delta(x - x_0)$? Discuta separadamente os casos $x_0 = 0$ e $x_0 \neq 0$.

5ª Questão:

Partindo das expressões

$$\vec{\nabla}_i \phi = \frac{1}{h_i} \partial_i \phi. \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h^3} \sum_j \partial_j \left(\frac{h^3 V_j}{h_j} \right), \quad (9)$$

e

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \sum_{j,k} \frac{\epsilon_{ijk}}{h^3} h_i \partial_j (V_k h_k). \quad (10)$$

A) Mostre que em um sistema de coordenadas ortogonal qualquer a expressão do Laplaciano é dada por

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h^3} \sum_i \partial_i' \left(\frac{h^3 \partial_i' \phi}{h_i^2} \right). \quad (11)$$

B) Obtenha as expressões dos gradiente, divergência e rotacional em coordenadas esféricas e cilíndricas, usando adicionalmente que

$$x'_1 = r, \quad x'_2 = \theta, \quad x'_3 = \phi \quad (12)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta, \quad (13)$$

e

$$x'_1 = \tilde{r}, \quad x'_2 = \phi, \quad x'_3 = z \quad (14)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1. \quad (15)$$

respectivamente.

6^a Questão:

Um dipolo físico é composto por uma carga q localizada no ponto $\vec{r}_1=(a,0,0)$, e outra, $-q$ localizada no ponto $\vec{r}_2=(-a,0,0)$. Além destas duas cargas imagine uma carga de valor $5q$ localizada na origem. Escreva em termos das funções delta de Dirac a densidade de cargas associada.

O potencial criado por uma densidade de cargas $\rho(\vec{r}')$, no ponto \vec{r} é definido por

$$\phi(\vec{r}) = k \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\Delta r}, \quad (16)$$

com $\Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ e k uma constante. Partindo da equação acima, obtenha o valor do potencial criado pela distribuição de cargas no ponto $\vec{r} = (0, a, 0)$.